MA1 – přednáška 14. 12. 2020 (příklady)

Další příklady řešení obyčejných diferenciálních rovnic se separovatelnými proměnnými:

Příklad 1

1) obecné řešení rovnice $y' = \frac{2}{x}(1-y)$, $x \neq 0$, $y \in R$

zde $(a,b) = (-\infty, 0)$ nebo $(a,b) = (0, +\infty)$
$(c,d) = (-\infty, +\infty)$ $(= R)$

a) $y_{st}(x) \equiv 1$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$ – stacionární řešení

b) $y(x) \neq 1$ všude, tj. pro $x \in (-\infty, 0)$ i pro $x \in (0, +\infty)$:
pak můžeme separovat (existence „zkrácený" zápis)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}(1-y) \quad , \quad y(x) \neq 1 \text{ pro } x \neq 0 \text{, pak}$$

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{2}{x}\,dx \quad \text{a integrace}$$

$$-\ln|y-1| = 2\ln|x| + C \quad , \text{ a „lépe"}$$

$$\ln|y-1| = -2\ln|x| + c \quad , \quad c \in R \text{ lib.} \quad , \text{ a pak}$$

$$|y-1| = \frac{e^c}{x^2} \quad c \in R \text{ (a odstraníme abs. hodnotu)}$$

$$y-1 = \frac{K}{x^2} \quad , \quad K = e^c \text{ nebo } K = -e^c$$

a tedy $\underline{y(x) = 1 + \frac{K}{x^2}}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$, $K \neq 0$

c) řešení v b) „neskloužou" k řešení stacionárnímu, neboť „jen" $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{K}{x^2}\right) = 1$.

2) <u>řešení počáteční úlohy</u> pro rovnici $y' = \frac{2}{x}(1-y)$:
počáteční podmínku lze volit: $x_0 \neq 0$, $y_0 \in R$, tj.
„hledáme" řešení rovnice, které splňuje: $y(x_0) = y_0$:

a) <u>je-li $y(x_0) = 1$</u>, pak dostaneme jen stacionární řešení, a $x_0 \in (-\infty, 0)$ je $y_{př}(x) = 1$, $x \in (-\infty, 0)$
$x_0 \in (0, +\infty)$ je $y_{př}(x) = 1$, $x \in (0, +\infty)$

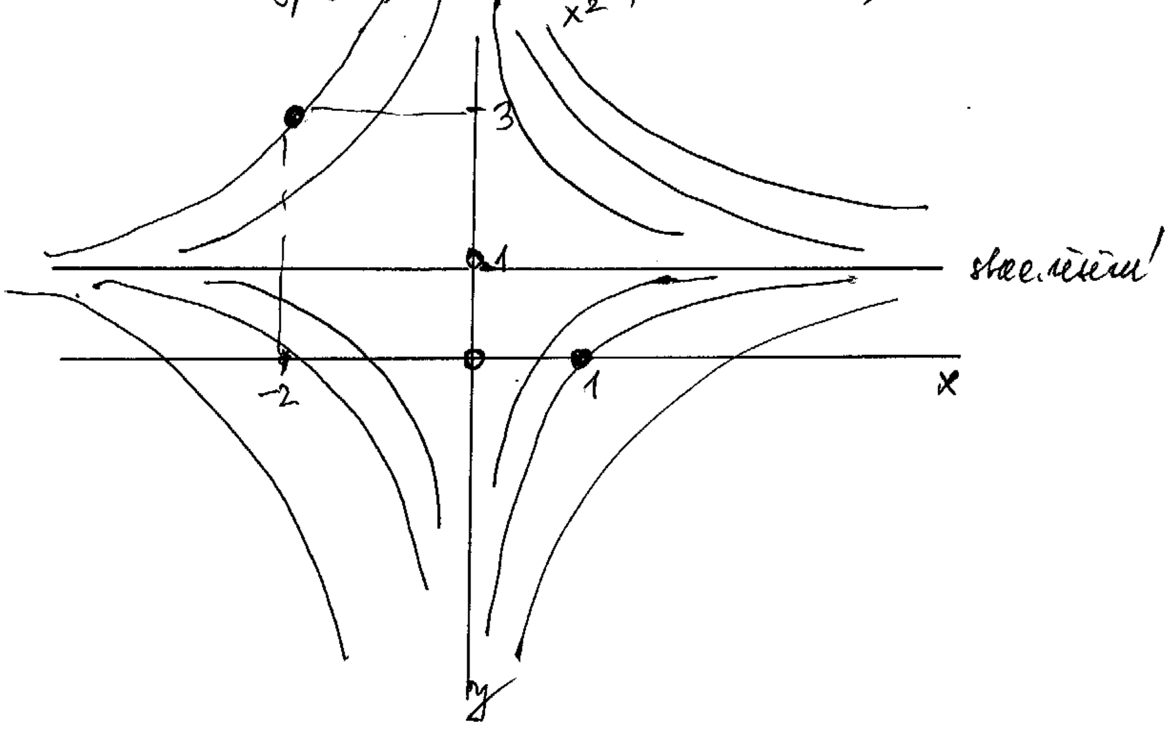
b) <u>je-li $y_0 \neq 1$</u>, pak $y_0 = 1 + \frac{K}{x_0^2}$ a tedy $K = (y_0 - 1) \cdot x_0^2$
a pro $x_0 \in (-\infty, 0)$ je $y(x) = 1 + \frac{(y_0-1)x_0^2}{x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$,
a je-li $x_0 \in (0, +\infty)$ je $y(x) = 1 + \frac{(y_0-1)x_0^2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$
(tj. každou počáteční podmínkou je dáno jediné řešení).

<u>např.</u> <u>$y(1) = 0$</u>: $0 = \frac{K}{1^2} + 1 \Rightarrow K = -1$

a <u>$y_{př}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$</u>

<u>$y(-2) = 3$</u>: $3 = \frac{K}{4} + 1 \Rightarrow K = 8$ a
$y_{př}(x) = 1 + \frac{8}{x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$

<u>Graficky</u>:



Příklad 2. Je dána diferenciální rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$

a) stacionární řešení $y_s(x) = 0$, $x \in R$;

b) $y(x) \neq 0$ pro vš. $x \in R$, pak lze separovat (a dostaneme):

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2}} = 3\int dx$$

$$3\sqrt[3]{y} = 3x + \tilde{C}, \qquad \tilde{C} \in R$$

$$(*) \qquad \sqrt[3]{y} = x + c, \qquad c = \frac{\tilde{c}}{3}$$

(opět – $c = \frac{\tilde{c}}{3}$ jsou všechna reálná čísla)

a tedy $y(x) = (x+c)^3$,

kde $x \in (-\infty, -c)$ nebo $x \in (-c, +\infty)$, neboť $y(x) \neq 0$!

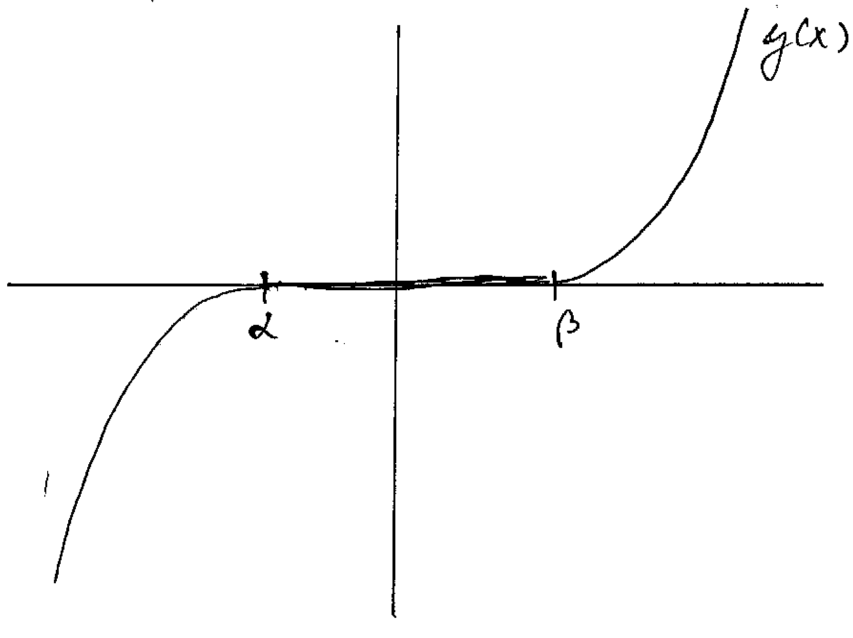
c) ale „slepením" se stacionárním řešení dostaneme řešení, která jsou definována v R (t.zv. maximální řešení):

např.: zvolíme $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in R$ a pak funkce

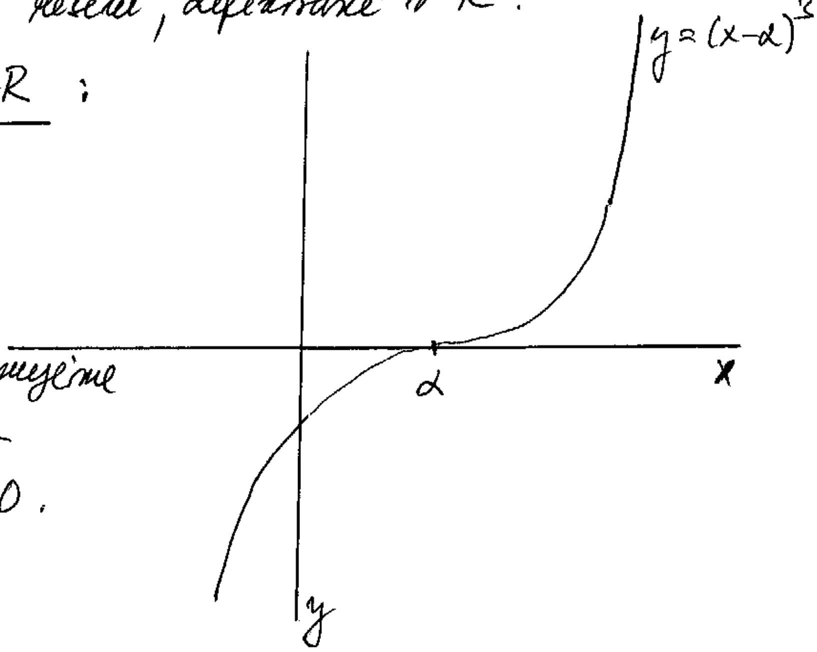
$$y(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3, & x \in (-\infty, \alpha) \\ 0, & x \in \langle \alpha, \beta \rangle \\ (x-\beta)^3, & x \in (\beta, +\infty) \end{cases}$$

je také řešení naší diferenciální rovnice

graficky:



Ale i pro $\alpha=\beta$ dostaneme řešení, definované v R:



$\underline{y(x) = (x-\alpha)^3 \quad , \; x\in R}$:

$y(x) = (x-\alpha)^3 , \; x\in(-\infty,\alpha)$

$y(x) = (x-\alpha)^3 , \; x\in(\alpha,+\infty)$

a $y(\alpha)=0$ – pojistě dodefinujeme v bodě $x=\alpha$ –

– a pak platí i existuje $y'(\alpha)=0$.

<u>K řešení počáteční úlohy</u>

např. <u>hledáme řešení dané rovnice, pro které platí $y(0)=8$:</u>

z (*) (viz řešení rovnice separací) máme $C = \sqrt[3]{y_0} - x_0$

pro počáteční podmínku $y(x_0)=y_0$, ($y_0 \neq 0$),

tj. pro $x_0=0$, $y_0=8$ je $\underline{C=2}$ a postupu řešení v b),

máme: $y(x) = (x+2)^3$ pro $x\in(-2,+\infty)$

(neboť $x_0\in(-2,+\infty)$)

ale dále lze řešení definovat:

$y(-2)=0$ a $y(x) = (x+2)^3$ i pro $x\in(-\infty,-2)$,

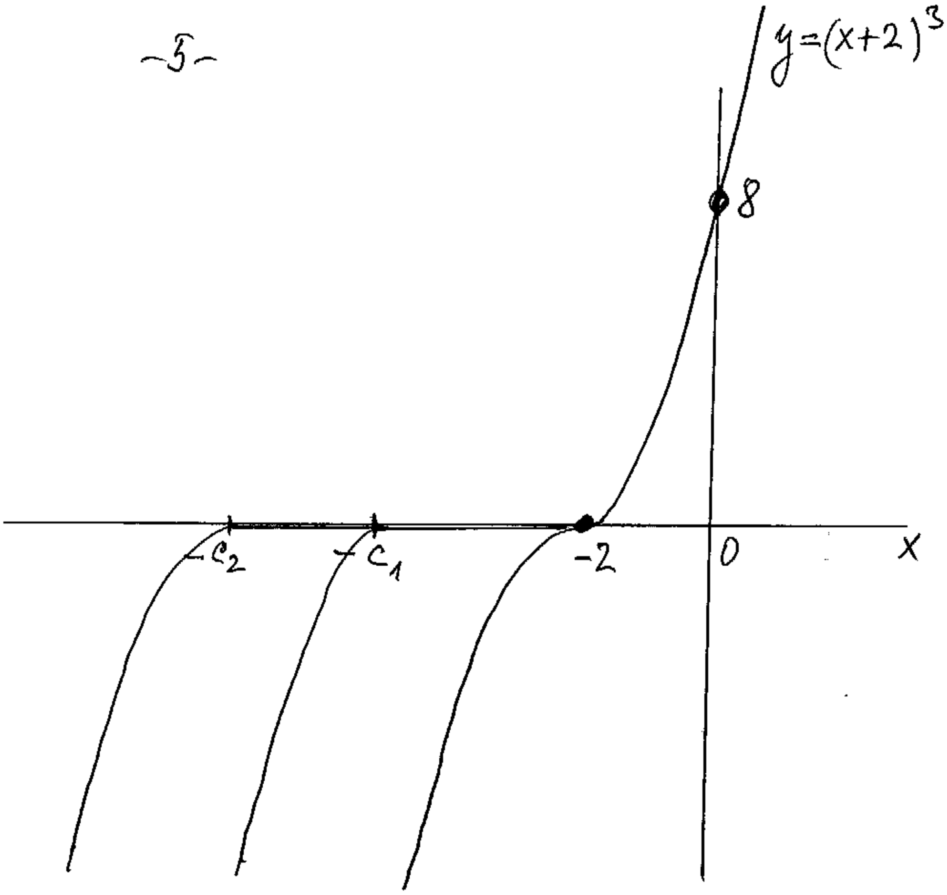
ale lze $y(x)=0$ pro $x\in\langle -c,-2\rangle$ $\underline{(c>2)}$ a

$y(x) = (x+c)^3$ pro $x\in(-\infty,-c)$

Tedy, danou počáteční podmínku splňuje nekonečně mnoho řešení!

Zde tedy příklad na „skluzy" řešení diferenciální rovnice!

„Graficky:"



Ještě
Příklad 3. obecné řešení rovnice $y' = \frac{2}{x}(y-1)$

(už „rychleji"): $x \neq 0$, $y \in R$ (tj. $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$ – – opět dle zvolené počáteční podmínky)

a) $y(x) \equiv 1$, $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$ – stacionární řešení

b) pro $y(x) \neq 0$ v $(-\infty, 0)$ a v $(0, +\infty)$ – řešíme separací:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{2}{x}\,dx$$, tedy dostaneme

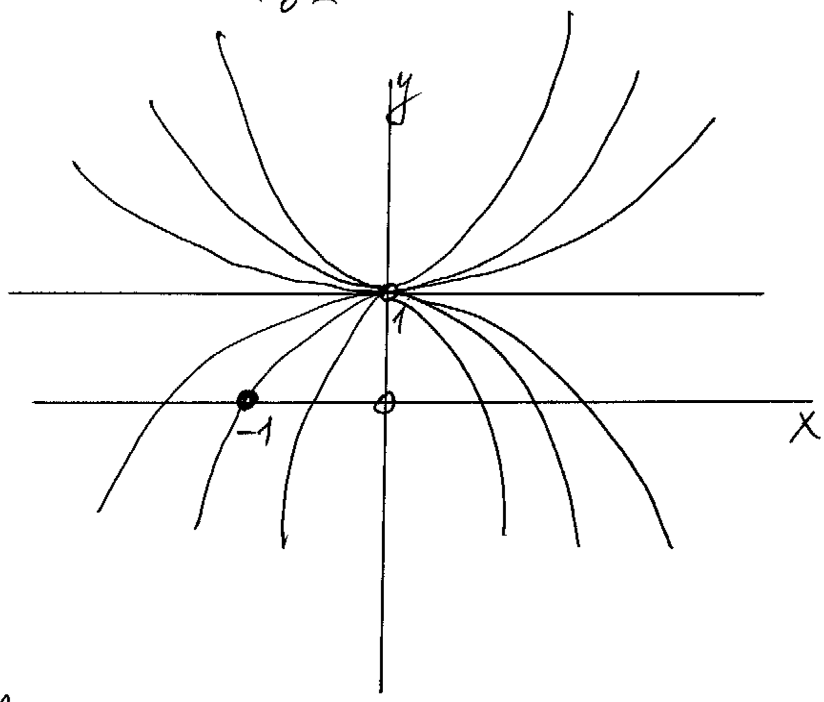
$$\ln|y-1| = 2\ln|x| + C$$ a odtud

$$\underline{y(x) = 1 + Kx^2, \quad K \neq 0}$$

$x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$

c) slepy zde nebudou – $\lim_{x \to 0} (1 + Kx^2) = 1$ (jen pro $x=0$) ale $x \neq 0$ pro danou def. rovnice!

„Graficky:"



Počáteční úlohy:

a) $y(1) = 1$ ... stac. řešení $y(x) \equiv 1$, $x \in (0, +\infty)$

b) $y(-1) = 0$; $0 = 1 + k \cdot (-1)^2 \Rightarrow k = -1$

a řešení: $y_{poč}(x) = 1 - x^2$, $x \in (-\infty, 0)$

c) $y(2) = 5$; $5 = 1 + k \cdot 2^2 \Rightarrow k = 1$

a řešení: $y_{poč}(x) = 1 + x^2$, $x \in (0, +\infty)$

Příklad 4. (ještě jeden příklad „lepení" řešení)

$$y' = 4x\sqrt{y} \quad , \; x \in R, \; y(x) \geq 0$$

a) $y_{st}(x) \equiv 0$, $x \in R$ (stacionární řešení)

b) $y(x) \neq 0$ v nějakém intervalu (α, β), pak

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int 2x\,dx \; , \; tj.$$

$$(*) \quad \sqrt{y} = x^2 + c$$

tedy „musí" být $x^2 + c \geq 0$!

(c „nemůže být" libovolné, ale volba „c" ovlivní i interval, kde bude řešení dáno v (*))

(i) $\underline{c>0}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{y} = x^2+c>0$ $\Rightarrow$

$$y(x) = (x^2+c)^2, \quad x \in R$$

(ii) $\underline{c=0}$: $\sqrt{y} = x^2$ pro $x \neq 0$ (řešíme $y(x)\neq 0$!)

a pak dostaneme řešení $y(x)=x^4$ pro $x\neq 0$

a $y(0)=0$ (dodefinujeme v $x=0$ pomocí slepení s $y_{st}(x)=0$)

(iii) $\underline{c<0}$: $x^2+c>0$

pro $x^2>-c$, tj. $|x|>\sqrt{-c}$

a řešení $y(x)$ také bude definováno v R „slepením" se stacionárním řešením:

pro $x\in(-\infty,-\sqrt{-c})$ a $x\in(+\sqrt{-c},+\infty)$ je

$$y(x) = (x^2+c)^2$$

a pro $x\in\langle-\sqrt{-c},+\sqrt{-c}\rangle$ je $y(x)=0$.

<u>graficky:</u>